## **培优课13 截线、截面问题**

### **培优点一 截面问题**

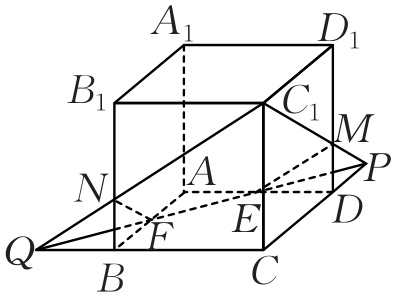
#### **审题指导**

典例1 在正方体中，,分别是棱和上的点，（审题①由比例关系考虑平行作截面），则正方体中过,,的截面图形是( C ).

**解题观摩**

A. 三角形 B. 四边形 C. 五边形 D. 六边形

[解析]如图，延长直线,相交于点，延长直线,相交于点，连接交直线于点，交直线于点，连接,,因为,，



，············审题① 则五边形即为所求截面.

#### **通性通法**

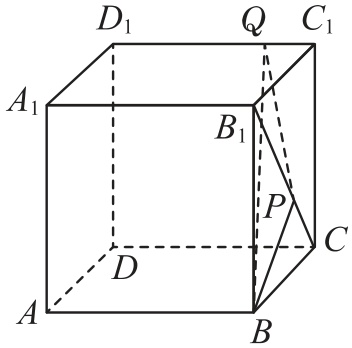
1.作截面应遵循的三个原则：（1）在同一平面上的两点可引直线；（2）凡是相交的直线都要画出它们的交点；（3）凡是相交的平面都要画出它们的交线.

2.作出截面的关键是作出截线，作出截线的主要根据：（1）确定平面的条件；（2）三线共点的条件；（3）面面平行的性质定理.

#### **培优训练**

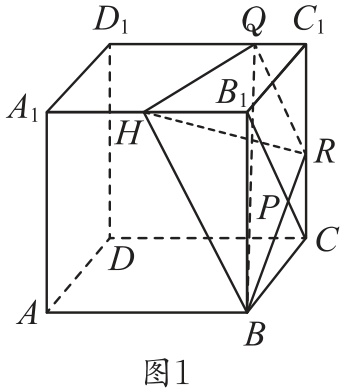
##### **面积问题设问变式**

1. 如图，正方体的棱长为4，,分别为,上的点，，，用经过，，三点的平面截该正方体，则所截得的截面面积为( D ).



A. B. C. D.

[解析]如图1所示，延长交于点，

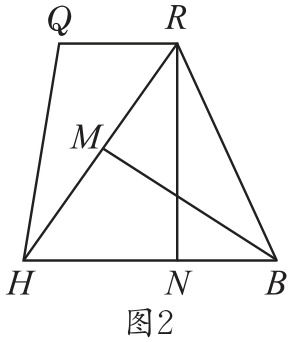


则，即为的中点，

连接，取的中点，连接，

则，

，，，四点共面，，，，



截面如图2所示，在中，边上的高，记边上的高为，

则，，则所截得的截面面积.故选.

##### **周长问题设问变式**

2. 已知正方体的棱长为4，，分别是棱，的中点，则平面截该正方体所得的截面图形周长为( D ).

A. 6 B.

C. D.

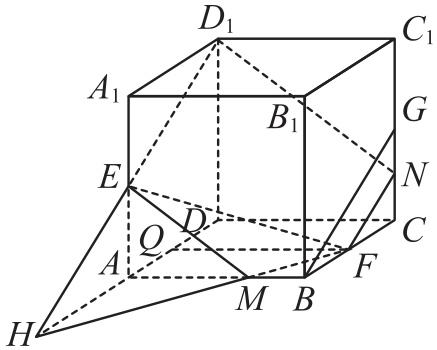
[解析]如图，取的中点，连接,则,取的中点，连接，，则，所以,则直线 平面.延长,交于点，连接交于点，连接,则为的中点，则平面截该正方体所得的截面图形为五边形，由条件可得,则,,

则，,，

取的中点，连接，则，所以，所以,则，

则，，

所以截面图形的周长为.故选.

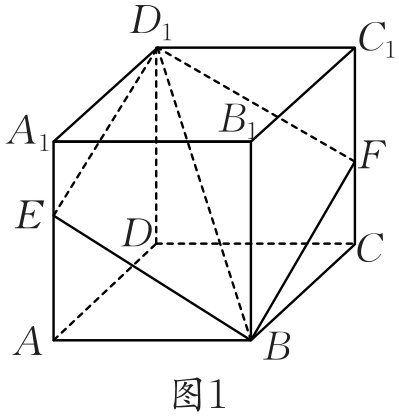


##### **最值问题综合变式**

3. 用平面 截棱长为1的正方体，所得的截面的周长记为，则当平面 经过正方体的某条体对角线时，的最小值为( D ).

A. B. C. D.

[解析]假设截面 过体对角线（当截面 过其他体对角线时，结论一样），如图1所示，

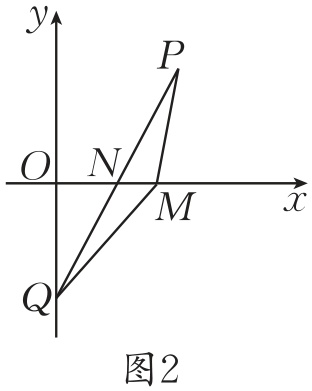


因为一平面与两平行平面相交，交线平行，所以,，且,，

所以四边形为平行四边形，所以.

设，则，故，

记，，



其几何意义可以看成轴上的点到定点和的距离之和，如图2所示，

显然，当经过点,时，，，三点共线，距离之和最小，此时，，

所以.故选.

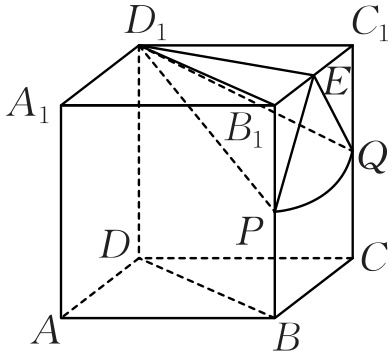
### **培优点二 截线问题**

#### **审题指导**

典例2 已知（审题①考虑在直棱柱的性质得到等边三角形）.（审题②确定交点位置，确定圆心角的大小及交线长）的球面与平面的交线长为.

**解题观摩**

[解析]如图，设的中点为，球面与棱,的交点分别为,，连接,,,,,,,由 ，,



，············审题①

故,，············审题①

则且 平面,所以为球面截侧面所得截面圆的圆心，

设截面圆的半径为，则，可得，

.············审题②

又,所以,同理，，

，············审题②

.············审题②

#### **通性通法**

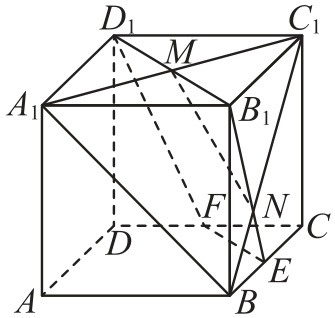
作交线的方法有如下两种：①利用基本事实3作交线；②利用线面平行及面面平行的性质定理去寻找线面平行及面面平行，然后根据性质作出交线.

#### **培优训练**

##### **求线面相交的轨迹设问变式**

1. 已知正方体的棱长为，，分别为，的中点，是线段上的动点，与平面的交点的轨迹长为.

[解析]如图所示，连接，，连接，交于点，连接，交于点，



由，即，，，四点共面，

由是线段上的动点，当重合于或时，，与平面的交点分别为，，连接,即的轨迹为线段，

由棱长为，得，，

又,所以，则，

由，得 ，

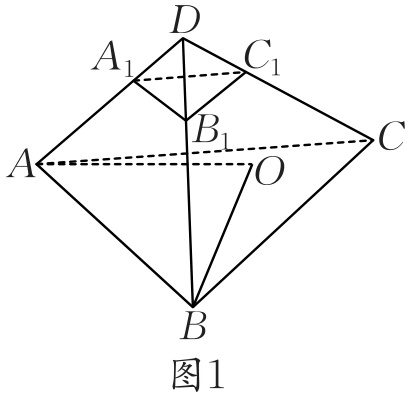
则在中，

.

##### **以棱台为载体条件变式**

2. [2024·福州模拟]已知正三棱台的上、下底面边长分别为1和3，侧棱长为2，以下底面顶点为球心，为半径的球面与侧面的交线长为.

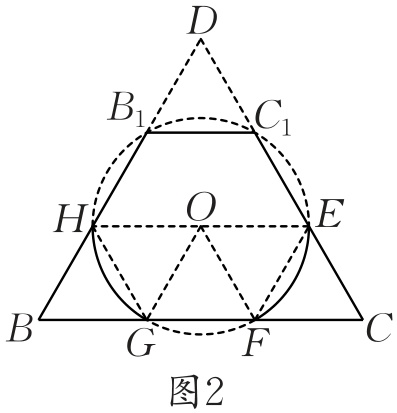
[解析]将正三棱台补形成正棱锥，如图1，



由，得，而，则，即为正三角形，三棱锥为正四面体，令正的中心为，连接,，因为 平面，，

所以，又球的半径为，

所以这个球面截平面所得截面圆是以为圆心，为半径的圆，



如图2，在正三角形中，分别取,的中点,，取的三等分点,，连接,，

显然，即,，同理，，即，

因为是正三角形，

所以，

同理，，

而，

故六边形是正六边形，其外接球的半径为1，点,,,,,在此球面截平面所得截面小圆上，连接,,,，则，此球面与侧面的交线为图中的两段圆弧（实线），所以交线长度为.

##### **以正四棱柱为载体条件变式**

3. [2024·南通模拟]在正四棱柱中，,，是的中点，点在棱上，，则平面与侧面的交线长为.

[解析]如图，分别取,的中点,，连接,，则,且，

在平面中，过点作交于，则为平面与侧面的交线，且,

因为,所以.

